SERIE NUMERICHE

Esercizi proposti

1. Applicando la definizione di convergenza di una serie trovare il carattere delle seguenti serie, e, in caso di convergenza, trovarne la somma:

$a)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ $\qquad [S_n = 1 - \frac{1}{n+1}\ ;\ S = 1]$

$b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2-1}$ $\qquad [S_n = 3\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)\ ;\ S = 3]$

$c)$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ $\qquad [S_n = \sqrt{n+1}\ ;\ S = +\infty]$

2. Verificare (utilizzando la condizione necessaria per la convergenza) che le seguenti serie divergono:

$a)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ $\qquad b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{1}{n}}$

$c)$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{1/n}}$ $\qquad d)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}$

$e)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ $\qquad f)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n n^2}$

3. Utilizzando la serie geometrica, discutere il comportamento delle serie seguenti e calcolarne la somma:

$a)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{\pi^n}$ $\qquad [S = \frac{9}{\pi-3}]$

$b)$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+\alpha^2)^n}$ $\qquad$ [conv. per $\alpha \neq 0\ ;\ S = \frac{1+\alpha^2}{2+\alpha^2}$]

$c)$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{\alpha}\right)^n$ $\qquad$ [conv. per $\alpha > \frac{3}{2}\ ;\ S = \frac{\alpha}{3}$]

4. Utilizzando i criteri del rapporto, della radice, del confronto e del confronto asintotico, dire se le seguenti serie (a termini positivi) convergono:

$a)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n}$ [conv.] $\qquad b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n!}$ [conv.]

$c)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^5}$ [div.] $\qquad d)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ [div.]

$e)$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$ [conv.] $\qquad f)$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{n/2}}$ [conv.]

$g)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n}$ [div.] $\qquad h)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+n}$ [conv.]

$i)$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ [div.] $\qquad l)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n}\right)^2$ [conv.]

$m)$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-\sqrt{n}}$ [div.] $\qquad n)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n + \cos n|}{n^3}$ [conv.]

$o)$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n-1}{3n^2+2}$ [div.] $\qquad p)$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ [conv.]

$q)$ $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \dots$ [div.] $\qquad r)$ $\frac{1}{8} + \frac{2}{27} + \frac{3}{64} + \frac{4}{125} + \dots$ [conv.]

5. Utilizzando il criterio di Leibniz, indagare sulla convergenza semplice e assoluta delle seguenti serie:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^n}$ [conv.ass.]

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ [conv. ass. se $\alpha > 1$; conv. semp. se $\alpha > 0$]

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ [conv.]

   d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}+2}{n^2+1}$ [conv.ass.]

   e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{2n-1}$ [conv.]

   f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log n + 1}$ [conv.]

   g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$ [conv.ass.]

   h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{37}}{(n+1)!}$ [conv.ass.]

   i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)^2}$ [conv.ass.]

   l) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \log n}$ [conv.]

6. Utilizzando il criterio di MacLaurin discutere il comportamento delle seguenti serie:

   a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}\log n}$ [conv.]

   b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \log n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ [conv. se $\alpha > 1$]

   c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ [conv. se $\alpha > 1$]

   d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha n}}{n^2+1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ [conv. per $\alpha \geq 0$]

   e) $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2+1)\alpha^n$, $\alpha \geq 0$ [conv. se $0 \leq \alpha < 1$]

   f) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha - \frac{1}{2}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ [conv. se $\alpha < -\frac{1}{2}$]

7. Utilizzando il teorema di MacLaurin provare che la seguente serie converge e trovare un maggiorante e un minorante per la somma.

   $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ [$\frac{1}{e} < S < \frac{2}{e}$]

8. Utilizzando le maggiorazioni derivanti dal teorema di MacLaurin stimare il numero di termini necessario per calcolare la somma della serie seguente commettendo un errore trascurabile rispetto a 10^{-4}.

   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ [$n \geq 8$]

9. Date le seguenti serie, dopo aver dimostrato che convergono, calcolare un'approssimazione delle rispettive somme a meno di 10^{-2}.

   a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^3 n}$ [$n \geq 1178$]

   b) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \log^3 n}$ [$n \geq 9$]